

Série 5 Corrigé:

G) Montrer que si: $\text{PGCD}(a, b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a \times c, b \times c)$
 $= \text{pgcd}(a, c) \times \text{pgcd}(b, c)$

① $\text{PGCD}(a, b) = 1 \Rightarrow a$ et b sont "premiers entre eux"
n'ont pas de diviseur commun (sauf 1 !)

Théorème de Gauss nous dit que a et b ont une décomposition unique sous forme de produit de nombres premiers !

Alors $a = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_N$ où $a_1, a_2, \dots, a_N$ sont premiers
② $b = b_1 \times b_2 \times \dots \times b_M$ où $b_1, b_2, \dots, b_M$ sont premiers

Or comme a et b sont premiers entre eux, aucun $a_i = b_j$

③ Que vaut $\text{PGCD}(a \times b, c)$

c a aussi une décomposition en facteurs premiers

$$c = c_1 \times c_2 \times \dots \times c_{N'}$$

où c_j sont premiers

$\text{PGCD}(a \times b, c)$ comprend tous les facteurs communs à $c = c_1 \times c_2 \times \dots$
et $a \times b = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_N \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_M$

$$\text{et } a \times b = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_r$$

||

$p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ où p_i est à la fois égal à 1 élément c_i
 Et un élément $\boxed{a_i \text{ ou } b_i}$
 (Car aucun $a_i = b_i$)

(4.a)

Soit il n'y a TAS de facteur commun et donc
 entre $a \times b$ et c , donc il n'y en a pas
 non plus entre a et c ni b et c

$$\text{PGCD}(a, c) = 1$$

$$\text{PGCD}(b, c) = 1$$

$$\text{PGCD}(a \times b, c) = 1 = |1| = \text{PGCD}(a, c) \times \text{PGCD}(b, c)$$

(4.b)

Si il y a des facteurs p_i communs alors on les regroupe

ainsi

$$\begin{matrix} = a_j \\ \text{ou } = b_i \\ \uparrow \end{matrix}$$

on remplace par les
 a_j et b_i corresp.

$$\text{PGCD}(a \times b, c) = p_1 \times p_2 \times \dots = \underbrace{[a_1 \times a_2 \times \dots]}_{\substack{\text{facteurs "p_i"} \\ \text{égaux à des facteurs} \\ \text{de } a}} \times \underbrace{[b_1 \times b_2 \times \dots]}_{\substack{\text{facteurs communs} \\ \text{avec } b}}$$

Aucun facteur premier peut être à la fois dans les a_j et les b_i
 car a, b sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(a \times b, c) &= \underbrace{[a_1 \times a_2 \times \dots]}_{\substack{\text{fact. communs de} \\ a \text{ et } c \\ \text{b Def.}}} \times \underbrace{[b_1 \times b_2 \times \dots]}_{\substack{\text{fact. communs} \\ \text{de } b \text{ et } c}} \\ &= \text{PGCD}(a, c) \times \text{PGCD}(b, c) \end{aligned}$$

CQFD!

Exercice 5 : Pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$ il existe une base dans laquelle
 $(q)_{10} = (x)_?$ où x a un nombre FINI de bits?

Preuve ① Par définition, si $q \in \mathbb{Q}^+$ alors il s'écrit sous forme de fraction $q = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ avec $a \in \mathbb{N}$ (car $q \geq 0$)
 $b \in \mathbb{N}^*$

$$(a)_{10} = (A)_b$$

Prenons $(q)_{10} \mapsto (y, z)_b$ ^{z est FINI!} donc $(q)_{10} = (y, z)_b = \underbrace{(A)_b}_{\text{écrit décimale en base } b} \cdot b^{-1}$

$(A)_b$ est un entier positif $\Rightarrow$ il a nombre fini de bits en base b !

$$(A)_b = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)_b$$

$\nearrow$ seule décimale

$$\text{Donc } (q)_{10} = (A)_b \cdot b^{-1} = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)_b$$

$\uparrow$ décale la virgule 1x à gauche $\uparrow$ virgule

En base b , $(q)_{10}$ n'a qu'une seule décimale!

#